Cuando el mundo tira para abajo
es mejor no estar atado a nada
Imaginen a los dinosaurios en la cama"
Charly García

Presentación Espacios Vectoriales.

¿Por qué?

Ustedes se han encontrado, en su experiencia, muchas veces con conjuntos de *elementos* donde tiene sentido o es necesario trabajar sumando elementos de ese conjunto o multiplicando elementos de ese conjunto por un escalar, obteniendo siempre otro elemento de ese conjunto.

- Eso sucedió cuando trabajaron con vectores en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$: la suma de dos vectores de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, daba por resultado otro vector de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Lo mismo pasaba cuando calculábamos múltiplos de un vector.
- También sucedió, cuando estudiaron funciones, aprendieron a sumar funciones con la definición:

  $$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in Dom(f) \cap Dom(g)$$

  y también a multiplicar una función por un escalar:

  $$(kf)(x) = kf(x),\ \forall x \in Dom(f) \text{ y } \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Si además las funciones eran continuas, obtenías otra función continua; si las funciones eran derivables obtenías otra función derivable.

> En todos estos casos, la suma de elementos de un conjunto $\mathbb{V}$ y el producto de un elemento de ese conjunto por un número, siempre daba como resultado otro elemento de ese conjunto. Las cosas quedaban *encerradas* en el conjunto en el que trabajábamos.

- Estudiaremos las propiedades comunes de este tipo de sistemas que constan de un conjunto de elementos, que vamos a llamar $\mathbb{V}$, donde se define una suma y un producto por escalar (elementos de un conjunto numérico) de forma tal que sus resultados nunca se *escapan* del conjunto dado.
- Si hacemos un esfuerzo de abstracción y estudiamos las propiedades comunes de estos sistemas, tendremos resultados que serán inmediatamente válidas tanto para el conjunto de funciones, como para el conjunto de vectores, matrices, polinomios, entre otros.

Vamos entonces a definir formalmente qué es un espacio vectorial.

Definición de Espacio Vectorial

Un espacio vectorial, consta de:

- Un conjunto $\mathbb{V}$ de objetos que llamaremos vectores;
- Un conjunto $\mathbb{K}$ de escalares ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$);
- Una operación, llamada suma, definida entre los elementos del conjunto $\mathbb{V}$, que cumple $u + v \in \mathbb{V}$;
- Una operación llamada producto por escalar, que asocia a cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ y cada vector $u \in \mathbb{V}$ el vector $\lambda.u \in \mathbb{V}$.

Además las operación suma y producto por escalar deberán cumplir:

S1. $u + v = v + u, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}$ (conmutatividad);

S2. $u+(v+w) = (u+v)+w = u+v+w, \quad \forall u, v, w \in \mathbb{V}$ (asociatividad);

S3. $\exists\ \mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V} / u + \mathbb{O}_{\mathbb{V}} = \mathbb{O}_{\mathbb{V}} + u = u$ (Existencia del elemento neutro para la suma);

S4. $\forall u \in \mathbb{V},\ \exists\ (-u) \in \mathbb{V}$ tal que $u + (-u) = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ (Existencia del inverso aditivo para todo elemento de $\mathbb{V}$).

P1. $1.u = u, \quad \forall u \in \mathbb{V}$;

P2. $(\lambda\beta).u = \lambda.(\beta.u), \quad \forall \lambda,\ \beta \in \mathbb{K}$ y $\forall u \in \mathbb{V}$;

P3. $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$ y $\forall u, v \in \mathbb{V}$

P4. $(\lambda+\beta).u = \lambda.u + \beta.u, \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{K}$ y $\forall u \in \mathbb{V}$

Ejemplos de Espacios de Vectoriales

- Empecemos por el más familiar: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, con la suma y el producto habituales es un espacio vectorial. Se dice que $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

  Notación: Aquí siempre escribiremos a los vectores, como **vectores columna**.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, x_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, \dots n. \right\}$$

- El conjunto $\mathbb{C}^n$, de las n-uplas formadas por números complejos, o sea $\mathbb{C}^n = \{[x_1 x_2 \dots \dots x_n]^T, x_1,\ \dots x_n \in \mathbb{C}\}$ junto con el conjunto de escalares complejos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, con la suma y el producto por escalar como los de antes forman un espacio vectorial. Se dice que $\mathbb{C}^n - \mathbb{C}$ es un espacio vectorial.
- El conjunto $\mathbb{C}^n$, de las n-uplas formadas por números complejos, como antes con el conjunto de escalares reales $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, con la misma definición de suma y producto por escalar, también forman un espacio vectorial. En este caso se dice que $\mathbb{C}^n$ - $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial.
- Los conjuntos de matrices de m filas y n columnas que se notan: $\mathbb{R}^{m\times n}$ y $\mathbb{C}^{m\times n}$ según sus coeficientes sean reales o complejos, junto con los conjuntos de escalares reales, cuando trabajamos con $\mathbb{R}^n$ y, en el caso de $\mathbb{C}^{m\times n}$ tanto con el conjunto numérico $\mathbb{R}$ como $\mathbb{C}$, forman un espacio vectorial con la definición de suma y producto por escalar ya conocidas.
- $C(\mathbb{I})$ denota el conjunto de todas las funciones continuas con dominio en $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ y codominio $\mathbb{R}$:

$$C(\mathbb{I}) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ es continua}\},$$

  junto con el conjunto de escalares $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, donde se define la suma como:

$$f + g : I \longrightarrow \mathbb{R}/(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

y el producto por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ como:

$$(\lambda.f) : I \longrightarrow \mathbb{R}/(\lambda.f)(x) = \lambda f(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

y $\forall f \in C(\mathbb{I})$ es un espacio vectorial.

> Recordemos que si f y $g \in C(\mathbb{I})$, se dice que $f = g$ si se cumple que $f(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{I}$. En este espacio vectorial $\mathbb{O}_{C(\mathbb{I})}$ es la función nula (el elemento neutro del espacio vectorial), o sea, $\mathbb{O}_{C(\mathbb{I})}(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{I}$.

- El conjunto $\mathbb{R}_n[x]$ es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor e igual que n, con el conjunto $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y la suma y producto por escalares definidos como en el item anterior forman un espacio vectorial. Si $P \in \mathbb{R}_n[x]$

$$P = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}; i = 1, \ldots, n.$$

Dados

$$\begin{aligned} P &= a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}_n[x] \\ Q &= b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{R}_n[x] \end{aligned}$$

se dice que $P = Q \Leftrightarrow a_i = b_i\ \forall i = 1, \ldots, n.$
El elemento neutro $\mathbb{O}_{\mathbb{R}_n[x]}$, en este espacio vectorial es el polinomio nulo, es decir el polinomio que tiene todos sus coeficientes iguales a 0:

$$\mathbb{O}_{\mathbb{R}_n[x]} = 0x^n + \cdots + 0x + 0.$$

Propiedades elementales

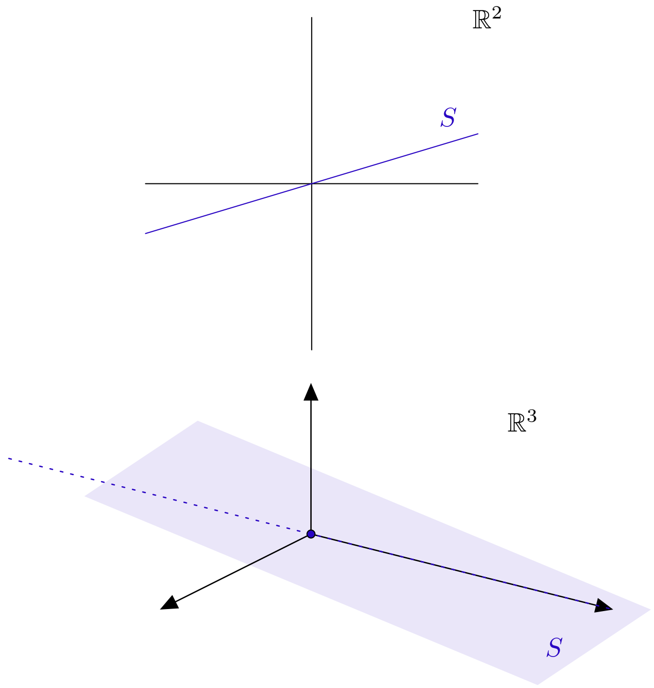
A partir de los axiomas se pueden demostrar las siguientes propiedades:

- El elemento neutro $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V}$ es único.
- El simétrico de un elemento $u \in \mathbb{V}$ es único.
- $0\,u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ para todo $u \in \mathbb{V}$.
- $\lambda \mathbb{O}_{\mathbb{V}} = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ para todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$.
- Si $\lambda u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ entonces $\lambda = 0$ o $u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$.
- $(-1)u = (-u)$.

Demostremos alguna de estas propiedades

- El elemento neutro $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V}$ es único.
  Supongamos que $\mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ y $\tilde{\mathbb{O}}_{\mathbb{V}}$ son elementos neutros en el espacio vectorial. Es decir
  $$\mathbb{O}_{\mathbb{V}} + u = u + \mathbb{O}_{\mathbb{V}} = u,$$
  para todo $u \in \mathbb{V}$ y
  $$\tilde{\mathbb{O}}_{\mathbb{V}} + v = v + \tilde{\mathbb{O}}_{\mathbb{V}} = v,$$
  para todo $v \in \mathbb{V}$.
  Pero como esto es cierto para todo $u, v \in \mathbb{V}$, en particular se cumple si $u = \tilde{\mathbb{O}}_{\mathbb{V}}$ y $v = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$. Por lo tanto: $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} = \tilde{\mathbb{O}}_{\mathbb{V}}$.
- $0 \cdot u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ para todo $u \in \mathbb{V}$.
  Sabemos que:
  $$u = (1+0)\cdot u = 1\cdot u + 0\cdot u = u + 0\cdot u$$
  entonces
  $$\underbrace{(-u) + u}_{\mathbb{O}_{\mathbb{V}}} = \underbrace{(-u) + u}_{\mathbb{O}_{\mathbb{V}}} + 0\cdot u = 0\cdot u \Rightarrow \mathbb{O}_{\mathbb{V}} = 0\cdot u$$

Cada paso utilizado debe corresponder a un axioma o una propiedad ya demostrada.



Subespacios

Suponiendo que $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial vamos a estudiar cómo detectar aquellos subconjuntos de $\mathbb{V}$ que resultan ser un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar definidos.

Subespacios Suponiendo que $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial vamos a estudiar cómo detectar aquellos subconjuntos de $\mathbb{V}$ que resultan ser un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar definidos.

Definición: Un subespacio de un $\mathbb{K}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$, es un subconjunto $S \subset \mathbb{V},\ S \neq \emptyset$ que resulta ser un espacio vectorial con la suma y el producto por escalar definidos.

Cuando estudiamos si S cumple la definición de espacio vectorial, debemos verificar, en primer lugar:

- que S resulta ser cerrado para las operaciones suma.
- que S resulta ser cerrado para producto por escalar.

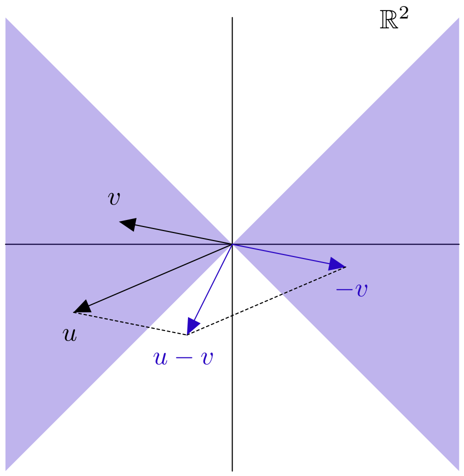
Ahora bien, por estar S incluido en un espacio vectorial hay una serie de propiedades que con seguridad se van a cumplir. ¿Cuáles?

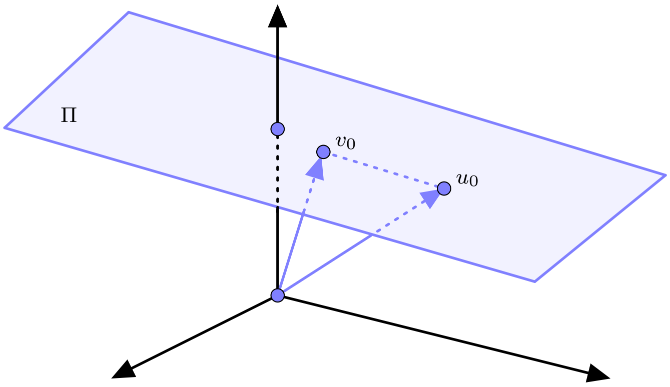
- La suma es conmutativa para todo par de elementos de $\mathbb{V}$, por lo tanto será conmutativa, en particular, para todo par de elementos en S. Lo mismo sucede con la propiedad asociativa para la suma y con las otras propiedades relativas al producto por escalar.
  Ya demostramos que en todo espacio vectorial se cumple que $0u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$, así que si $S \neq \emptyset \Rightarrow$ para cualquier $u \in S$, se va a cumplir que $0.u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ y como $\lambda.u \in S, \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in S.$
- Además, es fácil ver que si un subconjunto de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, es cerrado para la suma y el producto por escalar y $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in S \Rightarrow S$resulta ser un espacio vectorial.
  Entonces, si estamos en un espacio vectorial para ver si un subconjunto de $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial con la suma y producto por escalar ya definidos, sólo necesitaremos chequear tres propiedades.

Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, se dice que $S \subset \mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ si se cumple:

- 1. $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in S$;
- 2. Si $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$;
- 3. Si $u \in S$ y $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda u \in S$.

Tendremos como primer tarea estudiar si distintos subconjuntos definidos en un espacio vectorial son o no son subespacios.





Ejemplo de conjuntos que no son subespacios

Algunos ejemplos

Empecemos con un ejemplo familiar: el conjunto:

$$S = \left\{ (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

¿es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, con la suma y producto por escalar habituales?.

Demostremos analíticamente que es un subespacio:

a $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^3} \in S$ ¿Por qué? Porque $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^3} = (0\ 0\ 0)^T$ cumple la condición dada por la ecuación que define a este conjunto, pues $0-2.0+0 = 0$.

b Si $u, v \ \in S \Rightarrow u = (x_1\ x_2\ x_3)^T,$ y $\ v = (y_1\ y_2\ y_3)T$ son dos vectores en $\mathbb{R}^3$ que cumplen la ecuación que define a S. Tenemos que verificar si la suma de estos dos puntos genéricos de S pertenece a S, $u + v = (x_1 + y_1\ x_2 + y_2\ x_3 + y_3)$.

Si reemplazamos en la ecuación de S, las correspondientes coordenadas: $(x_1+y_1)-2(x_2+y_2)+(x_3+y_3) = \underbrace{(x_1 - 2x_2 + x_3)}_{=0 \text{ pues } u \in S} + \underbrace{(y_1 - 2y_2 + y_3)}_{=0 \text{ pues } v \in S} =$
$0 + 0 = 0$

c Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in S,\ \lambda u = (\lambda x_1\ \lambda x_2\ \lambda x_3)^T \Rightarrow \in S$, pues $\lambda x_1 - 2\lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda \underbrace{(x_1 - 2x_2 + x_3)}_{=0 \text{ pues } u \in S} = \lambda\ 0 = 0$

Como el Conjunto S cumple con las tres condiciones vistas podemos afirmar que es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Ahora bien, el subespacio S, también puede describirse explicitando la forma de las soluciones de la ecuación:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \iff x_3 = -x_1 + 2x_2$$

$$u \in S \Longrightarrow u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} =$$

$$u = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Notar que $[1 \quad 0 \quad -1]^T$ y $[0 \quad 1 \quad 2]^T$ pertenecen al subespacio vectorial S, y estamos haciendo sumas y multiplicando estos elementos, que están en S, por escalares x_i (con $i = 1, 2$).

Antes de dar nuestra próxima definición veamos en otro ejemplo, como hay *expresiones* que se repiten más allá de la naturaleza distinta de los elementos del espacio vectorial.

Estudiemos el conjunto:

$$T = \{p \in \mathbb{R}_2[x] / p(1) = 0\},$$

veamos que es un subespacio de $\mathbb{R}_2[x]$, con la suma y el producto por escalar ya definidos.

Tenemos que ver, entonces, que se cumplen las tres condiciones de subespacio:

a. El polinomio nulo $\mathbb{O}_{\mathbb{R}_2[x]}$ cumple obviamente la condición, pues $\mathbb{O}_{\mathbb{R}_2[x]}(x) = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, en particular $\mathbb{O}_{\mathbb{R}_2[x]}(1) = 0$.

b. Si P y $Q \in T$ entonces el polinomio $P + Q$, cumple que:

$$(P + Q)(1) = P(1) + Q(1) = 0$$

c. Por último si tomamos $\lambda \in \mathbb{R}$ y $P \in T$, el polinomio $\lambda \, P$, cumple que:

$$(\lambda P)(1) = \lambda P(1) = \lambda \, 0 = 0$$

Como el Conjunto T cumple con las tres condiciones de la definición, podemos afirmar que es un subespacio de $\mathbb{R}_2[x]$.

¿Cómo son los elementos de este subespacio?

Si $P \in T$, entonces se cumplen:

- $P = a_2x^2 + a_1x + a_0$ por ser un elemento de $\mathbb{R}_2[x]$
- $P(1) = a_2 + a_1 + a_0 = 0, \Leftrightarrow a_0 = -a_2 - a_1$.

Por lo tanto:

$$P = a_2x^2 + a_1x + (-a_2 - a_1) = a_2(x^2 - 1) + a_1(x - 1)$$

Entonces, $P \in T \Leftrightarrow P = a_2\,(x^2 - 1) + a_1; (x - 1),$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Notar que $(x^2 - 1)$ y $(x - 1)$ son elementos del subespacio T, y estamos sumando múltiplos de estos elementos, que están en T.

Observación:

Trabajamos con dos subespacios, uno de ellos S en $\mathbb{R}^3$ y el otro, T en $\mathbb{R}_2[x]$, para los dos encontramos una forma (muy parecida) de describir los elementos que pertenecían a cada uno:

$$u \in S \Leftrightarrow u = x_1 \underbrace{(1\ 0\ -1)^T}_{\text{vector de } S} + x_2 \underbrace{(0\ 1\ 2)^T}_{\text{vector de } S},\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

$$P \in T \Leftrightarrow P = a_2 \underbrace{(x^2 - 1)}_{\text{vector de } T} + a_1 \underbrace{(x - 1)}_{\text{vector de } T},\ \text{ con } a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Combinación lineal

Definición: Un vector $w \in \mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vectorial, es **combinación lineal** de un conjunto de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ en $\mathbb{V}$, si existen escalares, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i}_{\text{notación}} .$$

NOTACIÓN:
gen$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ representa el conjunto de todas las combinaciones lineales posibles entre los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Algunos resultados importantes

Observación: Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vectorial $\Rightarrow$ gen$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es siempre un subespacio de $\mathbb{V}$. Y se nombra como **el subespacio generado** por $v_1, \ldots v_n$.

Para demostrar que este conjunto es un subespacio, tendremos que probar:

a. $\mathbb{O}_\mathbb{V} \in$ gen$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. De hecho: $\mathbb{O}_\mathbb{V} = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$. (Pues $0u = \mathbb{O}_\mathbb{V}$ en todo espacio vectorial).

b. Si $u, w \in$ gen$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, quiero ver qué pasa con $u + v$:

$$u = u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \text{ y } w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$$

con $\lambda_i, \beta_i \in \mathbb{K}, \forall i = 1, \ldots n$.

Por lo tanto:

$$u + w = (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n)$$

Aplicando la propiedad asociativa de la suma y agrupando términos:

$$u + w = (\lambda_1 + \beta_1)v_1 + + \cdots + (\lambda_n + \beta_n)v_n \ \in \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

c. Si $u \in$ gen$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, quiero ver qué pasa con $\alpha\ u$.

Pero si $u \in$ gen$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \Rightarrow u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$

$$\alpha\ u = \alpha(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) = \underbrace{(\alpha\lambda_1)v_1 + (\alpha\lambda_2)v_2 + \cdots + (\alpha\lambda_n)v_n}_{\text{combinación lineal del conjunto}\{v_1,\ldots,v_n\}}$$

Generadores y subespacios finitamente generados

De ahora en más los subespacios se presentarán por las condiciones que cumplen sus elementos o por un conjunto de vectores que lo genera.

Cuestiones de lenguaje y escritura:

- El subespacio S de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ se dice que está generado por los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ cuando

$$S = gen\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

- En este caso, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ será un conjunto generador de S.
- Si S tiene un conjunto generador con finitos elementos entonces se dirá que S es finitamente generado.

Otra observación:

Si S es un subespacio de un $\mathbb{K}$- espacio vectorial $\mathbb{V}$ y $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subset S \Rightarrow$ gen $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subseteq S$.

Es una consecuencia directa de la definición de subespacio pues si S es un subespacio la combinación lineal de cualquier par de vectores de S está en S. Por lo tanto, si:

$$v \in \text{gen}\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \Rightarrow v = \underbrace{\lambda_1 u_1}_{\in S} + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$$

$$v = \underbrace{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2}_{\in S} + \cdots + \lambda_k u_k$$

Entonces: Si v es combinación lineal del conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, se cumple que $v \in S$:

$$\text{gen}\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subseteq S$$

.

El **conjunto generador de un subespacio no es único**. Es fácil verlo en los ejemplos anteriores.

- ¿Cómo pruebo que dos conjuntos distintos generan el mismo subespacio?

Tomemos un ejemplo, (distinto del que aparece en el Episodio 2).
Supongamos que nos preguntamos si los subespacios:

$$S = \text{gen}\{[1\ 1\ 0\ 1]^T,\ [1\ \ 1\ \ 1\ 2]^T\} \text{ y } T = \text{gen}\{[1\ \ 1\ \ -1\ \ 0]^T,\ [1\ \ 1\ \ -2\ \ -1]^T\}$$

son iguales.

Para demostrar que dos subespacios son iguales, en este etapa, tendremos que demostrar que se cumple la **doble inclusión**.
Primero demostraremos que $S \subseteq T$ y luego que $T \subseteq S$.

Por la última observación sabemos que si un conjunto de elementos esta en un subespacio, toda combinación lineal de ellos lo está. Vamos a aplicar esta propiedad en los dos casos.

$\boxed{S \subseteq T}$ Vamos a demostrar que cada uno de los generadores de S está en T. ¿Qué tengo que hacer? Tengo que " chequear" que cada uno de los generadores de S está es combinación lineal de los vectores del conjunto $\{[1\ \ 1\ -1\ \ 0]^T,\ [1\ \ 1\ -2\ -1]^T\}$

Veamos que $[1\ 1\ 0\ 1]^T \in T$ y que $[1\ \ 1\ \ 1\ 2]^T \in T$

$$[1\ 1\ 0\ 1]^T = \alpha[1\ \ 1\ \ -2\ \ \ -1]^T + \beta[1\ \ 1\ \ -1\ 0]^T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [1\ 1\ 0\ 1]^T = [\alpha+\beta \quad \alpha+\beta \quad -2\alpha-\beta \quad -\alpha]^T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha+\beta \\ 1 = \alpha+\beta \\ 0 = -2\alpha-\beta \\ 1 = -\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -1,\ \beta = 2}.$$

$$[1\ 1\ 0\ 1]^T \in T\checkmark$$

Ahora comprobemos que también $[1\ \ 1\ 1\ 2]^T \in T$

$$[1\ 1\ 1\ 2]^T = \alpha[1\ \ 1\ \ -2\ \ \ -1]^T + \beta[1\ \ 1\ \ -1\ 0]^T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [1\ 1\ 1\ 2]^T = [\alpha+\beta \quad \alpha+\beta \quad -2\alpha-\beta \quad -\alpha]^T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha+\beta \\ 1 = \alpha+\beta \\ 1 = -2\alpha-\beta \\ 2 = -\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -2,\ \beta = 3}.$$

$$[1\ 1\ 1\ 2]^T \in T\checkmark$$

Así demostramos que $S \subseteq T$, pues si los dos generadores der S están en T toda combinación lineal de ellos está, pues T es un subespacio $\Rightarrow S \subseteq T$.

$\boxed{T \subseteq S}$ Para demostrar esto, tenemos que ver que cada generador de T está en el subespacio S. Entonces ahora tenemos que " chequear" que $[1\ \ 1\ \ -1\ \ 0]^T \in S$ y que $[1\ \ 1\ \ -2\ \ -1]^T \in S$, entonces tenemos que ver que estos dos vectores son combinación lineal de los generadores de S.Tenemos que ver si existen α y β tal que :

$$[1\ \ 1\ \ -1\ \ 0]^T = \alpha[1\ 1\ 0\ 1]^T + \beta[1\ \ 1\ \ 1\ 2]^T$$

$$[1\ \ 1\ \ -1\ \ 0]^T = [\alpha + \beta\ \alpha + \beta\ \ \beta\ \ \alpha + 2\beta]^T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 1 = \alpha + \beta \\ -1 = \beta \\ 0 = \alpha + 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2,\ \beta = -1}.$$

$$[1\ \ 1\ \ -1\ \ 0]^T \in S \checkmark$$

Queda como tarea para el hogar chequear que $[1\ \ 1\ \ -2\ \ -1]^T \in S$ Una vez comprobado esto, queda probado que $T \subseteq S$

De esta manera probamos que $S \subseteq T$ y $T \subseteq S \Rightarrow S = T \checkmark$